Uppgift Ö7.3

Beräkna integralen

$$\int_0^1 e^x dx$$

exakt med hjälp av en Riemann-summa – till exempel en översumma med n st remsor.

Lösning

Antal remsor: n

Remsornas bredd: $\frac{1}{n}$

Remsornas höjder: $e^{\frac{1}{n}},\ e^{\frac{2}{n}},\ e^{\frac{3}{n}},\ e^{\frac{4}{n}} \dots e^{\frac{n}{n}}$

Översumman: $S = e^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n} + e^{\frac{2}{n}}\frac{1}{n} + e^{\frac{3}{n}}\frac{1}{n} + e^{\frac{4}{n}}\frac{1}{n} + \cdots + e^{\frac{n}{n}}\frac{1}{n}$

$$S = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}}\right) \tag{1}$$

Hur beräknar man den summan?

Hmmm…

Jag testar detta trix; att multiplicerad med $e^{\frac{1}{n}}$ i båda leden och får:

$$Se^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + \cdots + e^{\frac{n+1}{n}}\right) \tag{2}$$

Subtraherar sedan uttrycken (2) – (1) och får:

$$Se^{\frac{1}{n}} - S = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{n+1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$\Leftrightarrow S\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{n+1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}\right)$$

Division ger nu ett uttryck för vår Riemann-summa:

$$S = \frac{\frac{1}{n}\left(e^{\frac{n+1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{\frac{1}{n}\left(e^{1+\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}(e^1 - 1)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Jag anpassar nu för att kunna utnyttja standardgränsvärde i nämnaren:

$$S = \frac{e^{\frac{1}{n}}(e^1 - 1)}{\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}$$

Jag låter $n \to \infty$ vilket är detsamma som att $\frac{1}{n} \to 0$ vilket medför att

$$S_\infty = \lim_{n \to \infty} \frac{\overbrace{e^{\frac{1}{n}}}^{\to 1}(e^1 - 1)}{\underbrace{\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}_{\substack{\text{sgv ty } \frac{1}{n} \to 0 \\ \to 1}}} = \frac{1(e^1 - 1)}{1} = e - 1$$

Svar:

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1$$