

## Tentamen inom Matematisk Grundkurs

*Kompletterande tentamen för kursen HT 2024*

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Institution:	ITN
Kurs:	Matematisk Grundkurs
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmiddel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2025-01-07 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

### Del I

1. Vid betyg 3 på KTR4 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Lös ekvationen

$$x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$$

Svar:  $x = -3, x = -2, x = -1$  eller  $x = 1$

b) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -7 \\ 3x + y - z = 5 \\ x + 2y + z = 12 \end{cases}$$

Svar:  $x = 2, y = 3$  och  $z = 4$

c) Lös ekvationen

$$|x + 1| - 2|x - 2| = 0$$

Svar:  $x = 1$  eller  $x = 5$  **3 p**

2. Lös olikheten

$$x + 2 \geq \frac{x + 6}{x + 3}$$

Svar:  $x \in [-4, -3[ \cup [0, \infty[$

**3 p**

## Del II

3. Vid betyg 3 på KTR5 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a)

$$\sin 2x = \cos x$$

$$\text{Svar: } x = \frac{\pi}{2} + n\pi, x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$$

b)

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

$$\text{Svar: } x = 0 \text{ (dubbelrot)}$$

c)

$$\arccos(x - 1) (e^x - 1) \ln(x + 2) = 0$$

Ledning: Faktorerna nollställs av  $x = 2$ ,  $x = 0$  respektive  $x = -1$  men den sista stryks då den ligger utanför definitionsmängden för den första faktorn.

**3 p**

4. Låt

$$y = fx = \sqrt[3]{x - 4}$$

- a) Ange funktionens definitionsmängd och värdemängd.

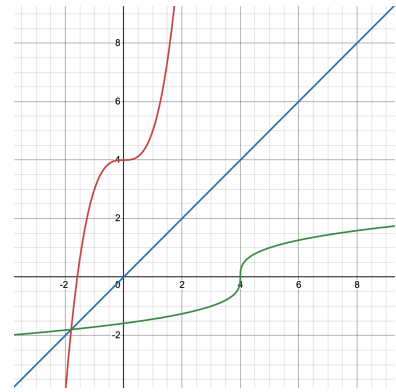
$$\text{Svar: } D_f = \mathbb{R} \text{ och } V_f = \mathbb{R}$$

- b) Bestäm inversen  $f^{-1}(x)$  och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

$$\text{Svar: } f(x) = x^3 + 4 \text{ med } D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \text{ och } V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

- c) Skissa kurvorna till  $f(x)$  och  $f^{-1}(x)$  i samma koordinatsystem.

Svar:



3 p

### Del III

5. Vid betyg 3 på KTR6 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös ekvationen

$$3z - \bar{z} = 8 + 12i$$

Svar:  $z = 4 + 3i$

- b) Lös ekvationen

$$|z - 3i| = |z - i|$$

Svar: Alla  $z$  med  $\text{Im}(z) = 2$

- c) Lös ekvationen

$$2iz^3 + 54 = 0$$

Svar:  $z = -3i$  eller  $z = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

6.

- a) För alla komplexa tal  $z$  och  $w$  gäller *triangelolikheten*:

$$|z| + |w| \geq |z + w|$$

Ge två exempel på  $z$  som tillsammans med

$$w = 3 + 4i$$

ger *likhet* i triangelolikheten.

Svar: Alla tal  $z$  med samma argument som  $w$  har ger rätt svar.

- b) Lös ekvationen

$$z^2 - (6 - 4i)z - 16 + 8i = 0$$

Ledning:  $\sqrt{841} = 29$

Ledning: Kvadratkomplettering ger

$$(z - (3 - 2i))^2 = 21 - 20i \text{ som med}$$

$$z - (3 - 2i) = x + iy \text{ ger}$$

$$(x + iy)^2 = 21 - 20i$$

som leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ 2xy = -20 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{841} = 29 \end{cases}$$

$$\text{med lösning } \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = \mp 2 \end{cases}$$

så att

$$z - (3 - 2i) = \pm 5 \mp 2i$$

vilket ger

$$z = -2 \text{ eller } z = 8 - 4i$$

**3 p**