INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen för kursen HT 2023

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2024-01-02 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. *Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall ”Bonus” i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Lös ekvationen

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

Lösningstips: Rotgissning och polynomdivision med tillhörande faktorer enligt faktorsatsen ger sedan ger $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ eller $x = 4$

b) Lös ekvationen

$$\sqrt{x+5} = 7 - x$$

Lösningstips: Kvadrering ger efter förenkling $x^2 - 15x + 44 = 0$ med två rötter varav den ena $x = 4$ duger i den ursprungliga ekvationen.

c) Lös olikheten

$$\frac{12 - x}{x - 4} \geq 0$$

Lösningstips: Teckenstudie av täljare och nämnare ger $x \in]4, 12]$

3 p

2. Lös olikheten

$$|2x + 12| - |2x - 3| > 0$$

Lösningstips: Tre fall studeras och man får $x \in \left]-\frac{9}{4}, \infty\right[$

3 p

Del II

3. *Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall ”Bonus” i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna

a)

$$\sin 2x - 4\sin x = 0$$

Lösningstips: Sinus för dubbla vinkeln och faktorisering ger $x = n\pi \;,\; n \in \mathbb{Z}$

b)

$$(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 32 = 0$$

Lösningstips: Variabelskifte $t = 2^x$ ger andragradsekvationen
$t^2 - 4t - 32 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-8)(t+4) = 0$
med $t = 8$ eller $t = -4$
varav det första alternativet är OK och ger $x = 3$

c)

$$\ln(x+9)^{x+2} = 0$$

Lösningstips: Tredje logaritmlagen ger $(x+2)\ln(x+9) = 0$ som ger nollställena $x = -2$ respektive $x = -8$ (som ger $\ln 1 = 0$).

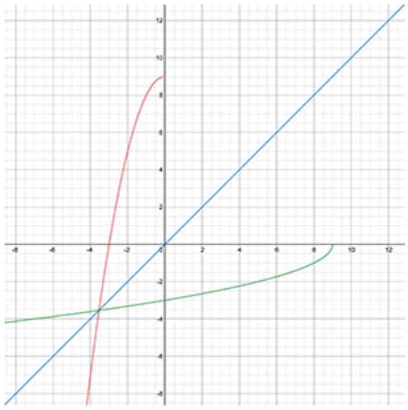
3 p

4. Funktion och invers

a) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem om

$$f(x) = 9 - x^2, \qquad x \in \,]-\infty, 0]$$

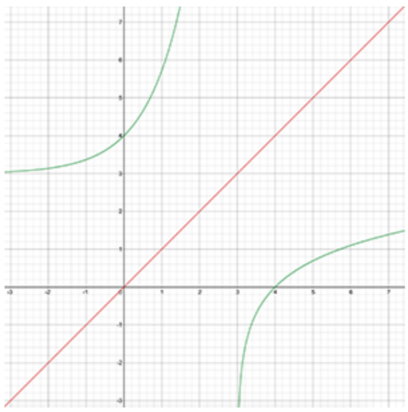
Svar: $f^{-1}(x) = -\sqrt{9-x}$, $D_{f^{-1}} = \,]-\infty, 9]$, $V_{f^{-1}} = \,]-\infty, 0]$



b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem om

$$f(x) = e^x + 3$$

Svar: $f^{-1}(x) = \ln(x-3)$, $D_{f^{-1}} = \,]3, \infty[$, $V_{f^{-1}} = \,]-\infty, \infty[$



3 p

Del III

5. *Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna och svara på rektangulär form:

a)

$$z^2 - 4z + 12i = 6iz - 4$$

Lösningstips: Sortering ger $z^2 - (4 + 6i)z + 4 + 12i = 0$ som sedan kvadratkompletteras till $\left(z - (2 + 3i)\right)^2 - (2 + 3i)^2 + 4 + 12i = 0$ och man får $z = 2 + 3i \pm 3i$

b)

$$z^4 + 13z^2 + 36 = 0$$

Lösningstips: $t = z^2$ och kvadratkomplettering ger $z = \pm 2i$ eller $z = \pm 3i$

c)

$$2iz^3 + 128 = 0$$

Lösningstips: Division med $2i$, polär form, De Moivre ger

$z = -4i$ eller $z = \pm 2\sqrt{3} + 2i$

3 p

6. Blandat

a) Visa vad som händer med argumentet och absolutbeloppet hos alla komplexa tal z vid följande multiplikation:

$$z(2 - 2i)$$

Lösningstips: $z(2 - 2i) = re^{iv}\sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{8}re^{i\left(v - \frac{\pi}{4}\right)}$ visar att argumentet minskar $\frac{\pi}{4}$ och absolutbeloppet blir $\sqrt{8}$ gånger så stort.

b) Visa med hjälp av Eulers formler att

$$2 \sin v \cos v = \sin 2v$$

Ledning:

$$2 \sin v \cos v = 2\frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} \cdot \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} = \cdots = \frac{e^{i2v} - e^{-i2v}}{2i} = \sin 2v$$

c) För vilka komplexa tal z gäller följande olikhet:

$$|z| + |4 + 4i| > |z + 4 + 4i|$$

Svar: Alla z har ett annat argument än vad $4 + 4i$ har – alltså alla z som inte har argumentet $\frac{\pi}{4}$. Detta kallas triangelolikheten.

3 p