INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

# Tentamen inom Matematisk Grundkurs

*Kompletterande tentamen för kursen HT 2023*

| | |
|---|---|
| Utbildningskod: | TNIU19 |
| Modul: | TEN2 |
| Max: | 18 p |
| Betyg 3: | Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III |
| Betyg 4: | Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III |
| Betyg 5: | Minst 15 p |
| Att tänka på: | Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar |
| Hjälpmedel: | Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva |
| Skrivtid: | 2024-01-02 kl 08:00–13:00 |
| Jour: | Peter Holgersson, 0705-19 99 92 |

---

## *Del I*

**1.** *Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Lös ekvationen

$$x^4 + 36 = 13x^2$$

Lösningstips: Substitution $t = x^2$ ger en ekvation med rötterna $t = 9$ eller $t = 4$ som sedan ger $x = \pm 3$ eller $x = \pm 2$

b) Lös ekvationen

$$\sqrt{8x + 76} = 2x + 4$$

Lösningstips: Kvadrering ger efter förenkling $x^2 - 2x - 15 = 0$ med två rötter varav den ena $x = 3$ duger i den ursprungliga ekvationen.

c) Lös olikheten

$$4-\frac{12}{x}\geq 0$$

Lösningstips: Lika nämnare, nollprodukt och teckenstudie av faktorerna ger $x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,[3,\infty[$

**3 p**

**2.** Lös olikheten

$$|2x+12|-|2x-3|>0$$

Lösningstips: Tre fall studeras och man får $x\in\left]-\frac{9}{4},\infty\right[$

**3 p**

---

## *Del II*

**3.** *Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna

a)

$$2\sin^2 x=2+\cos x$$

Svar: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+n2\pi$ eller $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$

b)

$$10^{2x}-90\cdot 10^{x}-1000=0$$

Lösningstips: Variabelskifte $t=10^{x}$ ger andragradsekvationen
$t^2-90t-1000=0 \quad\Leftrightarrow\quad (t-100)(t+10)=0$
med $t=100$ eller $t=-10$
varav det första alternativet är OK och ger $x=2$

c)

$$2\ln x-\ln(2x+35)=0$$

Lösningstips: Logaritmlagar ger andragradsekvationen $x^2 - 2x - 35 = 0$ med två rötter varav endast $x = 7$ duger i den ursprungliga ekvationen.

**3 p**

**4.** Låt

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & , \quad -\infty < x \leq 5 \\ x - 3 & , \quad a < x < \infty \end{cases}$$

a) Bestäm värdet $a$ så att $f(x)$ blir en omvändbar funktion med $V_f = \mathbb{R}$.

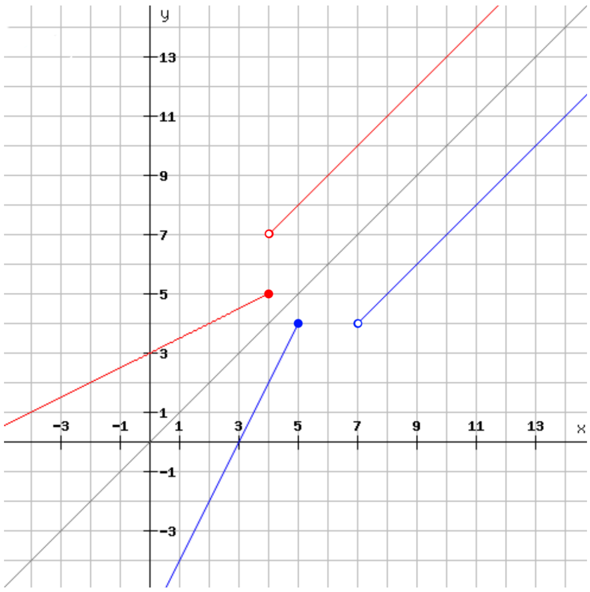
Svar: $a = 7$

b) Bestäm $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitionsmängder.

Svar: $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 3 & , \quad -\infty < x \leq 4 \\ x + 3 & , \quad 4 < x < \infty \end{cases}$

c) Skissa $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem.

Svar:




**3 p**

---

## *Del III*

**5.** *Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt maximala 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" i stället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna och svara på rektangulär form:

a)

$$z^2 - (6 + 8i)z + 2 + 24i = 0$$

Lösningstips: Kvadratkomplettering ger $z = 3 + 4i \pm 3i$

b)

$$5z - 28i = 2\bar{z} + 12$$

Lösningstips: $z = x + iy$ och $\bar{z} = x - iy$ ger $z = 4 + 4i$

c)

$$2iz^3 - 16 = 0$$

Lösningstips: Division med $2i$, polär form, De Moivre ger

$z = 2i$ eller $z = \pm\sqrt{3} - i$

**3 p**

**6.** Blandat

a) Visa vad som händer med argumentet och absolutbeloppet hos alla komplexa tal $z$ vid följande multiplikation:

$$z(1 - \sqrt{3}i)$$

Lösningstips: $z(1 - \sqrt{3}i) = re^{iv}2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2re^{i\left(v - \frac{\pi}{3}\right)}$ visar att argumentet minskar $\frac{\pi}{3}$ och absolutbeloppet fördubblas.

b) Vad händer alltid med ett komplext tal om man multiplicerar det med sitt konjugat?

Lösningstips: $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ och man ser att svaret alltid blir positivt och reellt eller noll.

c) För vilka komplexa tal $z$ gäller följande likhet:

$$|z| + |4 + 4i| = |z + 4 + 4i|$$

Svar: Alla $z$ som har samma argument som $4 + 4i$ har ger likhet. Alla andra $z$ ger ett högerled som är mindre än vänsterledet. Detta kallas triangelolikheten.

**3 p**