Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 2

Ordinarie tentamen för kursen VT2024

Examination:	Modul TEN 1 inom utbildning TNIU23
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall
Skrivtid:	2024-03-18 klockan 14:00-19:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

---

1. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 3y' - 18y = 27e^{3x}$$

Lösningstips:

Den homogena ekvationen löses med ansats $y = Ce^{rx}$ o.s.v. och man får efter faktorisering den tillhörande karaktäristisk ekvationen

$$r^2 + 3r - 18 = 0$$

som efter lösning och insättning ger värden på r så att

$$y_h = Ce^{3x} + De^{-6x}$$

Därmed duger inte $y = Ae^{3x}$ som ansats till y_p och vi väljer därför ansatsen $y = ze^{3x}$ med z som en funktion av x (alltså $z(x)$) så att $y' = z'e^{3x} + 3ze^{3x}$ och $y'' = z''e^{3x} + 6z'e^{3x} + 9ze^{3x}$. Insättning ger efter förenkling

$$(z'' + 9z')e^{3x} = 27e^{3x}$$

Därmed måste $z'' + 9z' = 27$ så att $9z' = 27$ samtidigt som $z'' = 0$. Eftersom att $z' = 3$ (ett polynom av grad noll) måste z vara ett förstagradspolynom och man väljer $z = 3x$ utan konstant då konstanten redan återfinns i den homogena ekvationens lösning och därmed inte tillför något nytt. Man får

$$y_p = 3xe^{3x}$$

Den allmänna lösningen blir därmed

$$y = y_h + y_p = (C + 3x)e^{3x} + De^{-6x}$$

(3 p)

2. Låt

$$y' + y = 2$$

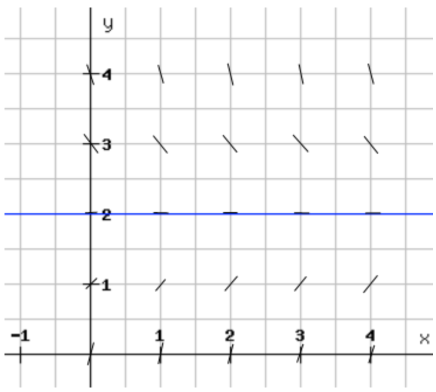
a) Skissa ett riktningsfält till differentialekvationen inom $0 \leq x \leq 4$ och $0 \leq y \leq 4$

Lösningstips:

Ekvationen skrivs på formen $y' = 2 - y$ och derivatan beräknas i utvalda punkter för att sedan åskådliggöras med hjälp av korta tangenter till de sökta lösningskurvorna.

x	y	$y' = 2 - y$
0	0	2
0	1	1
0	2	0
0	3	-1
0	4	-2
1	0	2
o.s.v.	o.s.v.	o.s.v.

Korta tangenter skissas och man anar lösningskurvor – särskilt $y = 2$ syns tydligt då den är en rät linje som övriga lösningskurvor närmar sig då $x \to \infty$



b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

Lösningstips:

Ekvationen är både separabel och linjär av första ordningen, dessutom har den konstanta koefficienter så att alla tre lösningsmetoder som ingår i kursen fungerar och ger den allmänna lösningen

$$y = 2 + Ce^{-x}$$

c) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen igen men med hjälp av en annan metod.

Lösningstips:

Ekvationen är både separabel och linjär av första ordningen, dessutom har den konstanta koefficienter så att alla tre lösningsmetoder som ingår i kursen fungerar och ger den allmänna lösningen

$$y = 2 + Ce^{-x}$$

(3 p)

3. Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

vara en täthetsfunktion för den stokastiska variabeln X.

a) Bestäm den tillhörande fördelningsfunktionen.

Lösningstips:

Fördelningsfunktionen till vår täthetsfunktion är den primitiva funktion $F_X(x)$ som uppfyller kraven

$$F_X(x) \to 1 \text{ då } x \to \infty$$

och

$$F_X(x) \to 0 \text{ då } x \to -\infty$$

I vårt fall ger

$$F_X(1) = 0$$

att $C = 1$ så att

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Beräkna den övre kvartilen.

Lösningstips:

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = 2$$

b) Skissa täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen i ett gemensamt koordinatsystem.

Svar:

(3 p)

4. Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\sin x^3}{(1-\cos x^2)}$$

Lösningstips:

Maclaurin-utveckling ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\sin x^3}{(1-\cos x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+2x+\frac{4x^2}{2}+O(x^3)-1\right)\left(x^3-O(x^9)\right)}{\left(1-\left(1-\frac{x^4}{2}+O(x^8)\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x^4+O(x^5)}{\frac{x^4}{2}+O(x^5)} = \lim_{x\to 0}\frac{2+O(x)}{\frac{1}{2}+O(x)} = 4$$

Även standardgränsvärden ger en smidig lösning...

b)

$$\lim_{a\to\infty}\int_{a+5}^{a+12}\left(2e^{\frac{1}{x}}+3e^{-x^2}\right)dx$$

Lösningstips:

$$\lim_{a\to\infty}\int_{a+5}^{a+12}(2e^{1/x}+3e^{-x^2})dx = \left|\begin{array}{c}\text{Medelvärdessatsen}\\ \text{för integraler med}\\ a-3\le\xi\le a+5\end{array}\right|$$

$$= \lim_{\xi\to\infty}\left(\underbrace{2e^{\frac{1}{\xi}}}_{\to 2}+\underbrace{3e^{-\xi^2}}_{\to 0}\right)\left((a+12)-(a+5)\right) = 2\cdot 7 = 14$$

(3 p)

5. Visa med hjälp av under- och översumma att

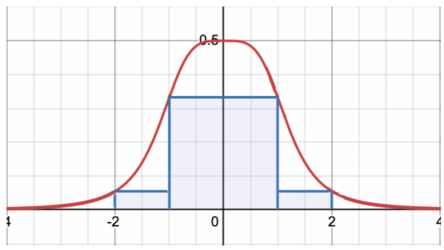
$$\frac{13}{18} \leq \int_{-2}^{2} \frac{1}{2+x^4}\,dx \leq \frac{31}{18}$$

Lösningstips:

Man noterar att funktionen $f(x) = \frac{1}{2+x^4}$ är symmetrisk kring $x = 0$ och är stängt växande för $x \leq 0$ och strängt avtagande för $x \geq 0$.

Över- och undertrappa med *ett eller två* delintervall ger summor som inte duger för att visa ovanstående.

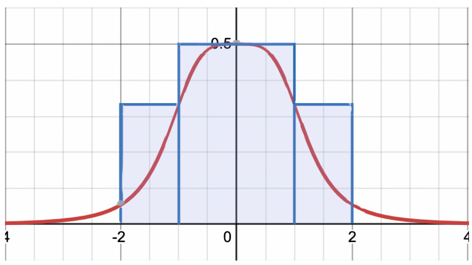
Undertrappa med fyra delintervall ger (med funktionsvärden i vänsterkant för $x \leq 0$) och i högerkant för $x \geq 0$) en undersumma



$$\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2+(-2)^4}+\frac{1}{2+(-1)^4}}^{\text{vänsterkant}}+\overbrace{\frac{1}{2+1^4}+\frac{1}{2+2^4}}^{\text{högerkant}}}_{\text{undersumma}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2+1^4}+\frac{1}{2+2^4}\right) = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{18}\right) = \frac{14}{18}$$

Övertrappa med fyra delintervall mer (med funktionsvärden i högerkant för $x \leq 0$ och i vänsterkant för $x \geq 0$) en översumma



$$\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2+(-1)^4}+\frac{1}{2+0^4}}^{\text{högerkant}}+\overbrace{\frac{1}{2+0^4}+\frac{1}{2+1^4}}^{\text{vänsterkant}}}_{\text{undersumma}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2+0^4}+\frac{1}{2+1^4}\right) = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{6} = \frac{30}{18}$$

Därmed gäller att

$$\frac{13}{18} < \frac{14}{18} = \text{undersumman} \leq \int_0^2 \frac{1}{2+x^4}\,dy \leq \text{översumman} = \frac{30}{18} < \frac{31}{18}$$

(3 p)

6. Låt $a > 0$. Det begränsade området mellan $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ och $y = a - x$ roterar ett varv runt x-axeln. Beräkna rotationskroppens volym.

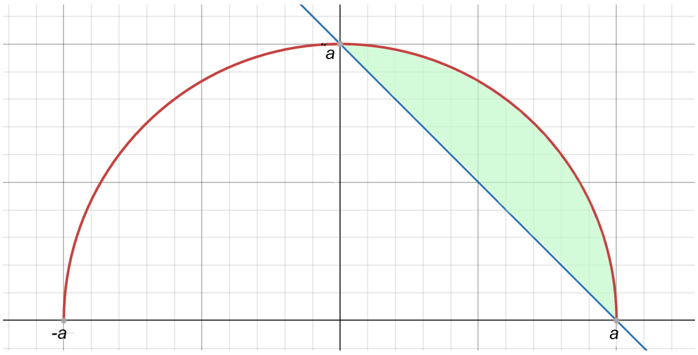
Lösningstips:

Aktuellt område identifieras genom att skärningspunkterna mellan halvcirkeln och den räta linjen beräknas:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a - x$$

$$\Leftrightarrow \cdots$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = a$$



Vid rotationen uppstår ett halvklot som har ett hålrum med formen av en kon.

$$V = V_{ytter} - V_{inner}$$

$$= \underbrace{\pi \int_0^a \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx}_{\text{halvklot}} - \underbrace{\pi \int_0^a (a - x)^2\, dx}_{\text{kon}}$$

$$= \pi \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx - \pi \int_0^a (a^2 - 2ax + x^2)\, dx$$

$$= \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a - \pi \left[a^2 x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \pi \left(\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - 0\right) - \pi \left(\left(a^3 - a^3 + \frac{a^3}{3}\right) - 0\right)$$

$$= \cdots = \frac{\pi a^3}{3}$$

(3 p)

7. Beräkna

$$\frac{d}{dx} \int_x^{2\pi} \sin t^2\, dt$$

med hjälp av derivatans definition och medelvärdessatsen för integraler.

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{2\pi}\sin t^2\,dt = -\frac{d}{dx}\underbrace{\int_{2\pi}^{x}\sin t^2\,dt}_{=S(x)} = -\frac{d}{dx}S(x) = \left|\begin{matrix}\text{Derivatans}\\ \text{definition}\end{matrix}\right|$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(S(x+h)-S(x)\big)$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{2\pi}^{x+h}\sin t^2\,dt - \int_{2\pi}^{x}\sin t^2\,dt\right) = |\text{Sats 6.3}|$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{2\pi}^{x}\sin t^2\,dt + \int_{x}^{x+h}\sin t^2\,dt - \int_{2\pi}^{x}\sin t^2\,dt\right)$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}\sin t^2\,dt = \left|\begin{matrix}\text{Medelvärdes}-\\ \text{satsen för}\\ \text{definitiointegralern}\end{matrix}\right| = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(\xi)\big((x+h)-x\big)$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sin\xi^2\,h = -\lim_{h\to 0}\sin\xi^2 = \left|\begin{matrix}h\to 0\\ \Leftrightarrow\\ \xi\to x\end{matrix}\right| = -\lim_{\xi\to x}\sin\xi^2 = -\sin x^2$$

(3 p)