Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 2 för kursen VT2023

Examination: Modul TEN 1 inom utbildning TNIU23
Max: 21 p   betyg 5: ≥ 16 p   betyg 4: ≥ 12 p   betyg 3: ≥ 8 p
Bonus: 0-2 p grundad på KTR1
Lösningar: Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare
Skrivtid: 2023-08-26 kl 08-13

1.

a) Lös differentialekvationen

$$2xy' = y^2 + 4 \quad , \quad x > 0$$

Lösningstips:

Differentialekvationen är separabel. Variablerna separeras och lösningen fås via ledvis integration enligt

$$\frac{1}{4}\int \frac{dy}{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1} = \int \frac{dx}{2x}$$

Till sist löses y ut

Svar: $y = 2\tan(\ln x + C)$, då $\ln x + C \neq \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right), n \in \mathbb{Z}$

b) Lös differentialekvationen

$$xy' - y = x^2 \tan x \quad , \quad x > 0$$

Lösningstips:

Omskrivning på normalform:

$$y' - \frac{y}{x} = x \tan x \quad , \quad x > 0$$

Differentialekvationen är linjär av första ordningen och löses exempelvis genom multiplikation med en integrerande faktor

$$h(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{1}{|x|}$$

Man erhåller

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \tan x$$

med ett vänsterled som kan skrivas som ”derivatan av en produkt”

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = \tan x$$

Ledvis integration och y löses ut

Svar: $y = -x\ln|\cos x| + Cx$, då $x > 0$ och $x \neq \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right), n \in \mathbb{Z}$

c) Visa att ansatsen $y = Ce^{rx}$ med $C \neq 0$ ger den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + a = 0$$

för differentialekvationen

$$y'' + ay = 0$$

Lösningstips:

Insättning av $y = Ce^{rx}$ och $y'' = Cr^2e^{rx}$ ger

$$Cr^2e^{rx} + aCe^{rx} = \underbrace{Ce^{rx}}_{\neq 0}\underbrace{(r^2 + a)}_{=0} = 0$$

vilket ger den sökta karaktäristiska ekvationen $r^2 + a = 0$

3 p

2.

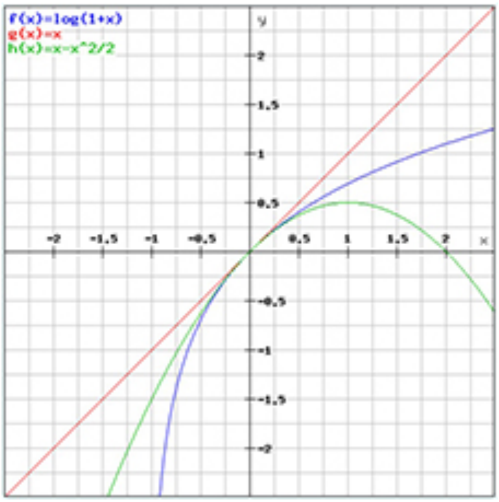
a) Skissa i ett gemensamt koordinatsystem, i en omgivning till $x = 0$, kurvan till

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

och tillhörande Maclaurin-polynom av grad 1 och 2.

Lösningstips:

Maclaurinpolynomen tas fram med hjälp av formel. Kurvor till $p_1(x) = x$ och $p_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$ samt funktionen $f(x) = \ln(1 + x)$ skissas och man ser att $p_2(x)$ något bättre approximerar $f(x)$ än vad $p_1(x)$ gör, i en omgivning till $x = 0$.



b) Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} \sin 3x}{x \cos 2x}$$

Lösningstips:

Maclaurinutveckling med Maclaurins formel ger

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} \sin 3x}{x \cos 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + 2x + O(x^2)\right)\left(3x + O(x^3)\right)}{x\left(1 + O(x^2)\right)} = \cdots = 3$$

3 p

3. Låt $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 1 \end{cases}$

a) Visa att $f(x)$ är en täthetsfunktion.

Lösningstips:

$f(x) \geq 0$ för alla värden (icke negativ) och dessutom gäller för integralen över hela definitionsmängden att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1$$

Därmed är $f(x)$ en täthetsfunktion.

b) Visa att denna täthetsfunktion saknar väntevärde.

Lösningstips:

Definitionen för väntevärde ger integralen som är divergent och därmed visar att väntevärde saknas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \text{divergent}$$

c) Bestäm täthetsfunktionens median.

Lösningstips:

Definitionen av median $x_{0.5} = b$ ger i detta fall

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1 = |\text{krav}| = \frac{1}{2}$$

som visar at $b = x_{0.5} = 2$

3 p

4.

a) Beräkna *volymen* av den rotationskropp som alstras då området mellan de tre räta linjerna $y = \frac{hx}{r}$, $y = h$ och $x = 0$ (med positiva konstanter r och h) roterar ett varv runt y-axeln.
(1,5 p)

Lösningstips:

Ett volymelement av formen liggande skiva med radien $x = \frac{ry}{h}$ och tjockleken dy

$$dV = Bdy = \pi x^2\, dy = \pi \left(\frac{ry}{h}\right)^2 dy$$

Hela volymen, i detta fall en kon med radien r och höjden h, blir

$$V = \int_0^h dV = \pi \int_0^h \left(\frac{ry}{h}\right)^2 dy = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h y^2\, dy = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

b) Beräkna *arean* av den rotationsyta som alstras då cirkeln $x^2 + y^2 = 9$ roterar ett varv runt x -axeln.

Lösningstips:

Ekvationen

$$x^2 + y^2 = 9$$

beskriver en cirkel med radien 3 och centrum i origo. Övre halvan av cirkeln beskrivs av funktionen

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

med derivatan

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Mantelarena av ett ”cirkelband”

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi\sqrt{9 - x^2}\sqrt{\frac{9 - x^2}{9 - x^2} + \frac{x^2}{9 - x^2}}\, dx = 2\pi\sqrt{9 - x^2}\sqrt{\frac{9}{9 - x^2}}\, dx = 6\pi\, dx$$

Hela klotarean:

$$A = \int_{-3}^{3} dA = 6\pi\int_{-3}^{3} dx = 6\pi[x]_{-3}^{3} = 36\pi \ \ \text{(areaenheter)}$$

3 p

5.

Bestäm den lösningskurva till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}\sin x$$

som tangerar x-axeln i origo.

Lösningstips:

Den homogena ekvationen

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

löses med hjälp av tillhörande karaktäristiska ekvation

$$r^2 - 4r + 3r = (r - 1)(r - 3) = 0$$

vars rötter ger

$$y_h = Ae^x + Be^{3x}$$

Partikulära lösningar fås exempelvis med ansatsen

$$y_p = e^{2x}(C\sin x + D\cos x)$$

$$y_p{}' = 2e^{2x}(C\sin x + D\cos x) + e^{2x}(C\cos x - D\sin x)$$

$$y_p{}'' = 4e^{2x}(C\sin x + D\cos x) + 2e^{2x}(C\cos x - D\sin x)$$

$$+2e^{2x}(C\cos x - D\sin x) + e^{2x}(-C\sin x - D\cos x)$$

Insättning av i ekvationen ger ett ekvationssystem vars lösning är

$$\begin{cases} C = -\dfrac{1}{2} \\ D = 0 \end{cases}$$

så att

$$y_p = -\frac{1}{2}e^{2x}\sin x$$

Därmed sammanfattar vi

$$y = y_h + y_p = Ae^{x} + Be^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}\sin x$$

med

$$y' = y'_h + y'_p = Ae^{x} + 3Be^{3x} - e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}e^{2x}\cos x$$

Villkoret $y(0) = 0$ kräver att $A + B = 0$.

Villkoret $y'(0) = 0$ kräver att $A + 3B - \frac{1}{2} = 0$.

Ekvationssystemet ger $A = -\frac{1}{4}$ och $B = \frac{1}{4}$ så att

$$y = y_h + y_p = -\frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{4}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}\sin x$$

3 p

6.

Bestäm kurvlängden för $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ då $x \in [0, 2]$.

Lösningstips:

Derivering ger $f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

Ett bågelement

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{2x - x^2}}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2x - x^2 + 1 - 2x + x^2 +}{2x - x^2}}\, dx = \sqrt{\frac{1}{2x - x^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\, dx$$

Hela kurvlängden

$$s = \int_0^2 dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\, dx = [\arcsin(x-1)]_0^2$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi$$

3 p

7. Antag att f är kontinuerlig på I samt att x och $a \in I$. Bevisa utifrån bland annat medelvärdessatsen för integraler att

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Lösningstips:

Beviset av Analysens huvudsats finns under Sats 6.5 på sid 286 i läroboken samt i föreläsningsanteckningarna.

3 p