Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 1 för kursen VT2023

Examination:	Modul TEN 1 inom utbildning TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare			
Skrivtid:	2023-06-08 kl 14-19			

1.

a) Lös differentialekvationen

$$y' = y^3$$

Lösningstips:

Separera variablerna och integrera ledvis. Den allmänna lösningen blir $y = \pm\frac{1}{\sqrt{C-2x}}$ med $C - 2x > 0$

b) Lös differentialekvationen

$$xy' - y = 0$$

Lösningstips:

Båda leden multipliceras med en integrerande faktor $\frac{1}{x}$ eller så separeras variablerna följt av ledvis integration. Man får i båda fallen den allmänna lösningen $y = Cx$.

c) Visa med ansatsen $y = Ce^{rx}$ och Eulers första formel att ekvationen

$$y'' + y = 0$$

har den allmänna lösningen

$$y = A\cos x + B\sin x$$

Lösningstips:

Ansatsen ger efter derivering och insättning en nollprodukt med en faktorn $r^2 + 1$ som måste nollställas. Rötterna $r = \pm i$ ger

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

Som efter omskrivning med hjälp av Eulers första formel ger

$$y = A\cos x + B\sin x$$

(3 p)

2. Låt $f_X(x)$ vara täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{2x} & x \leq 0 \\ \dfrac{3e^{-3x}}{2} & x > 0 \end{cases}$$

a) Beräkna medianen.

b) Vilka egenskaper kännetecknar en fördelningsfunktion?

Svar: $f_X(x) \geq 0 \; och \; \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

c) Bestäm fördelningsfunktionen.

Svar: $F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}}{2} & x \leq 0 \\ 1 - \frac{e^{-3x}}{2} & x > 0 \end{cases}$

(3 p)

Svar: $x_{0.5} = 0$

3. Bestäm den lösningkurva till differentialekvationen

$$y'' + y' - 6y = e^{3x}$$

som har ett ändligt gränsvärde då $x \to -\infty$ och passerar punkten $(0,\ 2)$. (3 p)

Lösningstips:

Den homogena ekvationen löses och man får

$$y_h = Ae^{2x} + Be^{-3x}$$

vilka inte återfinns i högerledet. Därmed fungerar ansatsen $y_p = Ce^{3x}$ med tillhörande derivator. Insättning ger

$$y_p = \frac{1}{6}e^{3x}$$

Den allmänna lösningen blir

$$y = Ae^{2x} + Be^{-3x} + \frac{1}{6}e^{3x}$$

Det första villkoret kräver att $B = 0$ så att man inskränker sig till kurvorna

$$y = Ae^{2x} + \frac{1}{6}e^{3x}$$

Varav endast

$$y = \frac{11}{6}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{3x}$$

passerar den utvalda punkten.

4.

a) Anpassa a så att gränsvärdet existerar ändligt och beräkna därefter gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{a - e^{2x} + \sin 2x - \cos 4x}{x^2}$$

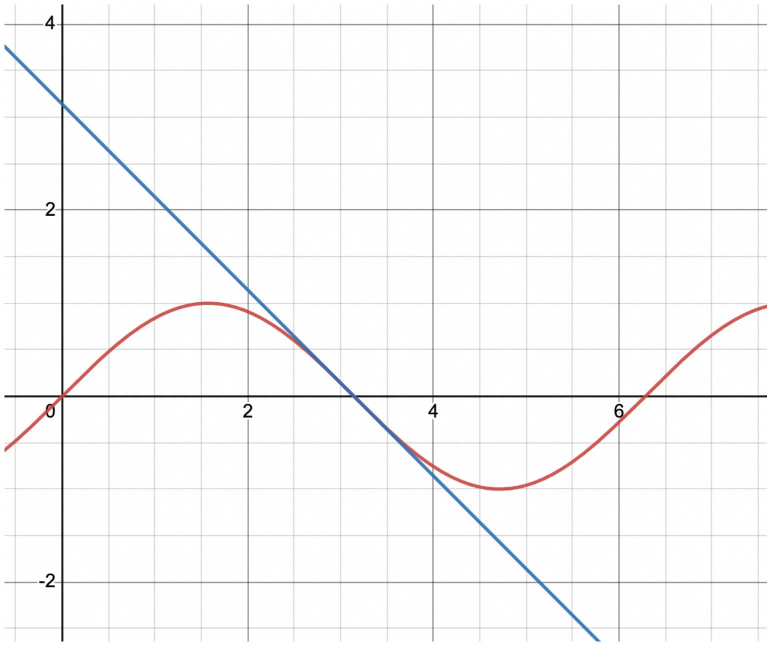
Lösningstips:

Maclaurin-utveckling av täljaren (minst t.o.m. grad 2) visar att $a = 2$ krävs för att täljare och nämnare skall få samma grad så att gränsvärde existerar då $x \to 0$. Gränsvärdet blir då 6.

b) Bestäm den räta linje som så bra som möjligt överensstämmer med funktionen $y = \sin x$ i en omgivning till $x = \pi$. Skissa sedan sinuskurvan med den tillhörande räta linjen.

Lösningstips:

Taylor-utveckling i en omgivning till $x = \pi$ ger Taylor-polynom av grad 1: $T_1(x) = \pi - x$



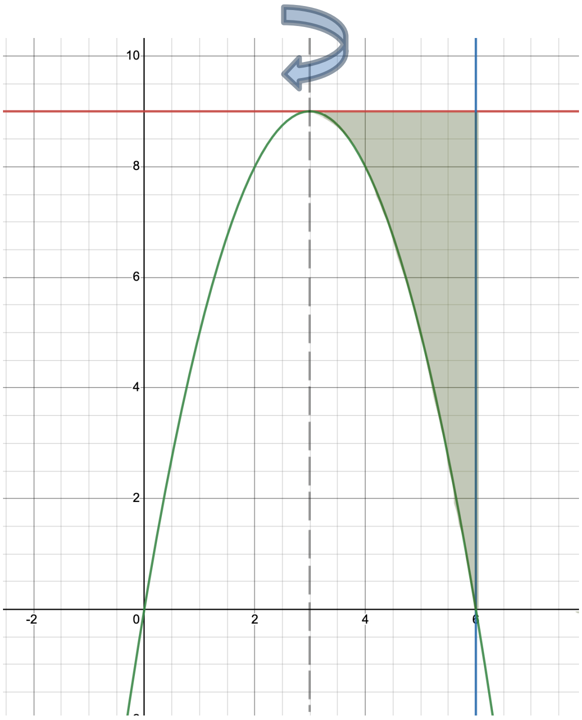
(3 p)

5. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då ”det begränsade området mellan kurvan $y = 6x - x^2$ och de båda två linjerna $y = 9$ och $x = 6$” roterar runt den räta linjen $x = 3$.

(3 p)

Lösningstips:

Kurvan ritas och området identifieras med hjälp av tre skärningspunkter mellan kurvan och linjerna.



Integral ställs exempelvis upp med skalmetoden.

$$V = \int_3^6 \underbrace{2\pi \underbrace{(x-3)}_{\text{radie}}}_{\text{omkrets}} \underbrace{\big(9-(6x-x^2)\big)}_{\substack{höjd \\ "tak - golv"}} \, dx = \cdots = \frac{81}{2}\pi \text{ v.e.}$$

6.

a) På vilka sätt utvidgas begreppet bestämd integral då man inför begreppet generaliserade integraler?

Lösningstips:

Se definition 6.6 och 6.7 i läroboken med integraler över icke kompakta eller obegränsade intervall samt med obegränsade funktionsvärden.

b) Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{-x}+e^x} dx$$

Lösningstips:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}\,dx = \begin{vmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{vmatrix}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\arctan t]_1^b = \frac{\pi}{4}$$

c) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{a\to\infty} \int_a^{a+6} \left(\arctan x - \frac{\cos x}{x}\right) dx$$

Lösningstips:

$$\lim_{a\to\infty} \int_a^{a+6} \left(\arctan x - \frac{\cos x}{x}\right) dx = \begin{vmatrix} \text{Medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler med} \\ a < \xi < a+5 \end{vmatrix}$$

$$= f(\xi)\big((a+6) - a\big) = \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{x} \to 0 \text{ då } x \to \infty \\ \arctan x \to \frac{\pi}{2} \text{ då } x \to \infty \end{vmatrix}$$

$$= 3\pi$$

a) Låt

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Beräkna $S'(x)$ med hjälp av bland annat medelvärdessatsen för integraler.

Lösningstips:

Se beviset för Analysens huvudsats

b) Förklara med hjälp av egna ord och en tydlig figur vad $S'(x)$ motsvarar.

Lösningstips:

$S'(x)$ anger hur snabbt integralen $S(x)$ växer då man justerar den högra integrationsgränsen x i positiv riktning. Skissen bör innehålla en kurva, integrationsgränserna a och x samt den skuggade integralen $S(x)$. I uppgift a) får man fram att marginaltillväxten $S'(x)$ är lika hög som funktionsvärdet $f(x)$ i just integrationsgränsen x.

(3 p)