Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Ordinarie tentamen för kursen HT2024

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN1
Institution:	ITN
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR8
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall
Skrivtid:	2025-01-13 klockan 08:00-13:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

---

1. Bestäm samtliga primitiva funktioner

a)

$$\int \frac{3+4x}{1+x^2}\,dx$$

Lösningstips: $3\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + 2\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = 3\arctan x + 2\ln(1+x^2) + C$

b)

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx$$

Lösningstips: $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \left|\begin{matrix}\text{Kedjeregeln baklänges}\\ \text{eller variabelskifte}\end{matrix}\right| = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

c)

$$\int \ln 5x\,dx$$

Lösningstips: Partiell integration ger $\int \overbrace{1}^{\Uparrow} \cdot \underbrace{\ln 5x}_{\Downarrow}\,dx = \cdots = x\ln 5x - x + C$

3 p

2.

a) Låt

$$f(x) = e^{2x}$$

och bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition.

Lösningstips: Derivatans definition ger

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{2(x+h)} - e^{2x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{2x}e^{2h} - e^{2x}}{h} = \lim_{h\to 0} 2e^{2x} \underbrace{\frac{\left(e^{2h} - 1\right)}{2h}}_{\substack{\text{sgv} \\ \to 1}} = 2e^{2x}$$

b) Låt

$$y = \arcsin x$$

och bestäm y' med hjälp av en annan funktions kända derivata och kedjeregeln.

Lösningstips: $y = \arcsin x$ ger $\sin y = x$ som efter ledvis derivering med avseende på x enligt kedjeregeln ger

$$\underbrace{\cos y}_{\substack{\text{känd} \\ \text{derivata}}} \cdot y' = 1$$

så att $y' = \frac{1}{\cos y} = \left| \begin{array}{c} \cos y > 0 \\ 1\text{: } a \text{ och } 4\text{: } e \\ \text{kvadranten} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3 p

3. Låt

$$y = f(x) = \frac{x^3 - 7\,x}{x^2 + 2}$$

a) Bestäm eventuella asymptoter till $f(x)$.

Lösningstips: Lodrät asymptot saknas eftersom nämnaren $x^2 + 2 \neq 0$

Eventuell sned asymptot har

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-7x}{(x^2+2)x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{7}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = 1$$

och

$$m = \lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-7x}{x^2+2} - x = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{-9x}{x^2+2} .. = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{9}{x}}{1+\frac{2}{x^2}} = 0$$

Alltså sned asymptot $y = x$

b) Bestäm eventuella stationära punkter för $f(x)$.

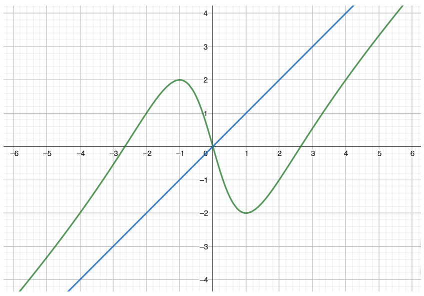
Lösningstips: Derivering enligt kvotregeln ger

$$f'(x) = \frac{(3x^2-7)(x^2+2)-(x^3-7x)2x}{(x^2+2)^2} = \cdots = \frac{x^4+13x^2-14}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{(x^2\ -1)(x^2+14)}{(x^2+2)^2} = \frac{(x+1)(x-1)\overbrace{(x^2+14)}^{\neq 0}}{(x^2+2)^2}$$

Teckenstudium av derivatan ger lokalt maximum i $x=-1$ och lokalt minimum i $x=1$.

c) Skissa kurvan och eventuella asymptoter till $f(x)$.

Lösningstips: 

3 p

4.

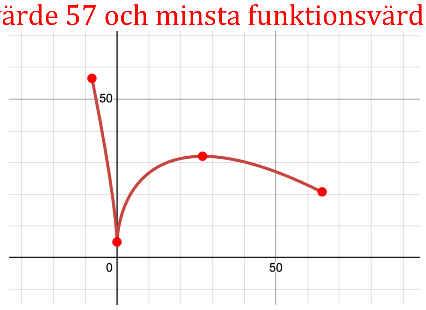
a) Bland vilka tre typer av punkter kan man finna en funktions lokala extrempunkter?

Svar: I eventuella ändpunkter (vid slutet intervall), i eventuella stationära punkter (där $f'(x)=0$) samt i eventuella singulära punkter (där $f'(x)$ saknas trots att punkten ingår i definitionsmängden).

b) Bestäm största och minsta värde hos funktionen

$$f(x) = 9x^{2/3}\ -2x+5\,, \qquad x \in [-8, 64]$$

Lösningstips: Lokala extrempunkter är
(i) ändpukterna $(-8, 57)$ och $(64, 21)$,
(ii) den inre stationära punkten $(27, 32)$ och
(iii) den singulära punkten $(0, 5)$.
Därmed blir största funktionsvärde 57 och minsta funktionsvärde 5.



3 p

5. Låt

$$f(x) = \begin{cases} kx + m & , \quad x \leq 4 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 4 \end{cases}$$

Bestäm k och m så att funktionen blir kontinuerlig och deriverbar.

Lösningstips: Högergränsvärdet bestäms i skarven:

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x} = 2.$$

Därmed vet man att punkten $(4, 2)$ skall ingå som ändpunkt hos $f(x) = kx + m$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig. Tack vare att punkten $(4, 2)$ ingår kan högerderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition enligt:

$$f'_{h\ddot{o}ger}(4) = \lim_{x \to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 4^+} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 4^+} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \to 4^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

Därmed vet man dessutom att $k = \frac{1}{4}$ är nödvändigt för $f(x) = kx + m$ så att vänster- och högerderivatan blir lika då $x = 4$. Annars skulle punkten $(4, 2)$ bli en singulär punkt (utifrån derivatan). Insättning av punkten och k-värdet i ”räta linjens ekvation” $y = kx + m$ ger sedan att $m = 1$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + 1 & \text{för} \quad x \leq 4 \\ \sqrt{x} & \text{för} \quad x > 4 \end{cases}$$

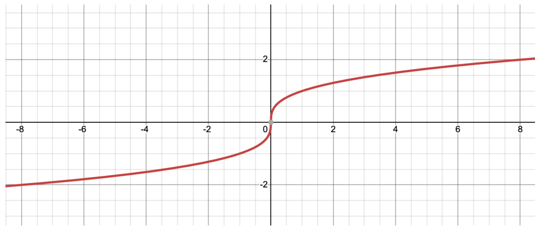
3 p

6. Rätt eller fel?

a) Påstående: Funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$ har en inflexionspunkt i origo trots att den inte är deriverbar i origo.

Rätt eller Fel? Motivera ditt svar med kort text och förklarande skiss.

Svar: Rätt. En inflexionspunkt är en punkt med positiv andraderivata på en ena sidan och negativ på andra sidan. Funktionen är visserligen ”vertikal” i origo och saknar därmed derivata i origo men här ändå andraderivata med olika tecken runt origo – konvex då $x < 0$ och konkav då $x > 0$.

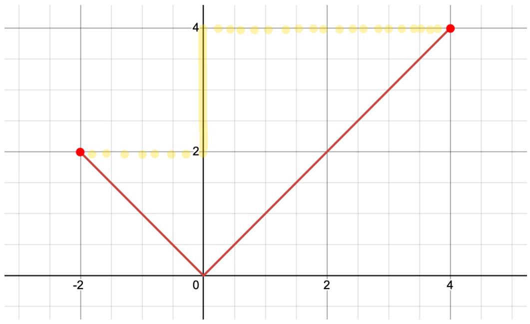


b) Låt funktionen $f(x)$ vara definierad på det kompakta intervallet $x \in [a, b]$.

Påstående: Funktionen måste vara deriverbar på intervallet $x \in]a, b[$ för att *Satsen om mellanliggande värde* ska gälla.

Rätt eller Fel? Motivera ditt svar med kort text och förklarande skiss.

Svar: Fel. Det räcker att funktionen är kontinuerlig (ett snällare krav) på det aktuella intervallet. Ett bra exempel är funktionen $f(x) = |x|$ inom det kompakta intervallet $x \in [-2, 4]$. Funktionen är inte deriverbar i origo men antar ändå alla mellanliggande funktionsvärden mellan $f(-2) = 2$ och $f(4) = 4$.



c) Låt funktionen $f(x)$ vara definierad på det kompakta intervallet $x \in [a, b]$ med $f(a) = f(b)$.

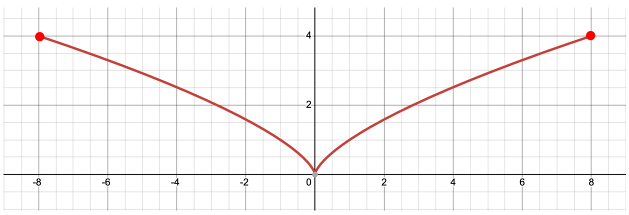
Påstående: Funktionen måste vara deriverbar på intervallet $x \in]a, b[$ för att *Rolles Sats* ska gälla?

Rätt eller Fel? Motivera ditt svar med kort text och förklarande skiss.

Svar: Rätt. Genom att exempelvis välja funktionen

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad , \quad -8 \leq x \leq 8$$

som har ändpunkter med samma funktionsvärde $f(-8) = f(8) = 2$ men inte är deriverbar i $x = 0$ så ser man att det saknas *inre stationära punkter*, alltså med $f'(x) = 0$” (vilket satsen anger att det ska finns).



7. Para ihop funktionerna till vänster med korrekt påstående till höger genom att göra beräkningar av lämpliga gränsvärden:

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \ x > 0 \\ x & , \ x \leq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & , \ x > 0 \\ x + 2 & , \ x \leq 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & , \ x \leq 0 \\ 1 + x & , \ x > 0 \end{cases}$

i) Vänsterkontinuerlig men inte högerkontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

ii) Varken höger- eller vänster-kontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

iii) Högerkontinuerlig men inte vänsterkontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

iv) Kontinuerlig och deriverbar i $x = 0$

v) Kontinuerlig i $x = 0$ men inte deriverbar i $x = 0$

Lösningstips:

Alla delfunktionerna är deriverbara i alla inre punkter (enligt sats) då de är uppbyggda av elementära funktioner. Därmed räcker det att kontrollera skarvarna i $x = 0$:

a) Kontinuerlig ty

$$\lim_{x \to 0^-} e^{-1/x^2} \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{e^{1/x^2}} = 0 \neq f(0) = 0$$

men vänsterderivatan i skarven är

$$f'_{vänster}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x e^{\frac{1}{x^2}}} = \cdots = \left| \begin{matrix} \text{enligt} \\ \text{Sats 3.13} \end{matrix} \right| = 0$$

medan högerderivatan $= 1$ (räta linjens *k*-värde).

Alltså **a = v**.

b) Högerkontinuerlig eftersom

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0 = f(0)$$

men inte vänsterkontinuerlig eftersom

$$\lim_{x \to 0^-} e^{-1/x} = \infty \neq f(0) = 0$$

Alltså **b = iii**.

c) Ej kontinuerlig eftersom

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty \neq f(0) = 0$$

så **c = ii**.

d) $\lim_{x \to 0^+} e^x = 1 \neq f(0)$, därmed inte högerkontinuerlig och inte heller deriverbar.

Alltså **d = i**.

e) Kontinuerlig tack vare att $\lim_{x \to 0^+} 1 + x = 1 = f(0)$ och derivatans definition ger vänsterderivatan $f'_{vänster}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x-0} = 1$ vilket är lika med högerderivatan linjens k-värde $= 1$ – alltså lika vänster- och högerderivata.

Alltså **e = iv**.

3 p