Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Ordinarie tentamen för kursen HT2023

Examination:	TEN 1, TNIU22
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR8
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall
Skrivtid:	2024-01-09 klockan 08:00-13:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

---

1. Lös de obestämda integralerna

a)

$$\int \frac{16x}{1+4x^2}\,dx$$

Ledning: ”Derivatan av nämnaren i täljaren” ger svaret $2\ln(1+4x^2)+C$

b)

$$\int e^{\sin x}\cos x\,dx$$

Ledning: Variabelsubstitution ger $e^{\sin x}+C$

c)

$$\int e^{2x}\sin 2x\,dx$$

Ledning: Upprepad partiell integration ger $\frac{e^{2x}}{4}(\sin 2x-\cos 2x)+C$

3 p

2. Låt

$$f(x)=\frac{6x^2-x^3-4}{x^2}$$

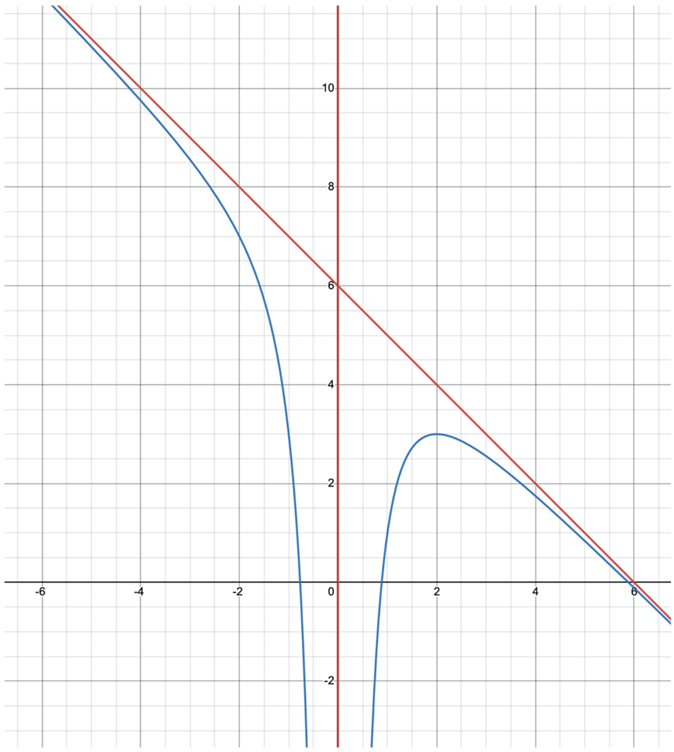
a) Bestäm samtliga stationära punkter.

Svar: $x=2$

b) Bestäm eventuella asymptoter.

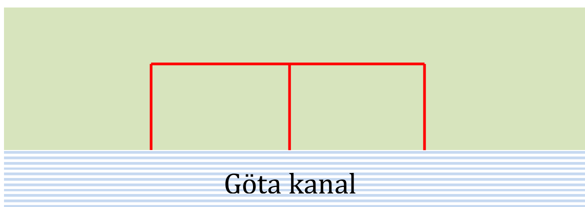
Ledning: Studier av gränsvärden ger $x=0$ och $y=6-x$

c) Skissa kurvan med tillhörande asymptoter.

Svar: 

3 p

3. En fårhage med två lika stora betesytor längs med Göta kanal inhägnas med tre staket vinkelrätt mot kanalen ett staket parallellt med kanalen (se figur nedan) – totalt 300 m staket. Beräkna hagens maximala area.



Ledning: Ekvationen $A = x(300 - 3x)$ studeras och man finner stationär punkt som ger ett maximum (visas med teckenstudie eller andraderivata) för $x = 50$ som ger arean 7500 m².

3 p

4. Låt funktionen $f(x)$ vara definierad på ett intervall $x \in [a, b]$.
Förklara varför *Medelvärdessatsen för derivata* inte gäller om man struntar i kravet att $f(x)$ är deriverbar på åtminstone $x \in]a, b[$.

Ledning: Se föreläsning 9 då detta studerades. Om funktionen tillåts vara icke deriverbar i en inre punkt av intervallet och exempelvis har ett ”hörn” är det inte säker att det finns någon inre punkt $x = \xi$ sådan att $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Detta förklaras och visas med en tydlig skiss.

3 p

5. Visa med hjälp av valfri sats att funktionen

$$f(x) = \sin x + 3\cos x - \frac{(x-\pi)^2}{\pi^2} \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$$

har minst en stationär punkt.

Ledning: Funktionen har samma funktionsvärde i ändpunkter $x = 0$ och $x = 2\pi$ enligt $f(0) = f(2\pi) = 2$. Dessutom är funktionen uppbyggd av elementära funktioner och är därmed deriverbar på $x \in]0, 2\pi[$. Man inser att förutsättningarna för *Rolles sats* uppfyllda och satsen berättar att då finns det minst en stationär punkt på $x \in]0, 2\pi[$.

3 p

6. Låt

$$f(x) = x + \sin x$$

a) Visa att funktionen har en kontinuerlig invers $f^{-1}(x)$.

Ledning: $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$ på hela den sammanhängande definitionsmängden. Den är lika med noll i enskilda punkter och för övrigt positiv – och därmed är $f(x)$ strängt monoton (i detta fall strängt växande) på ett *sammanhängande intervall* $x \in \mathbb{R}$ och en kontinuerlig invers existerar därmed enligt sats 3.5.

b) Visa att inversen $f^{-1}(x)$ inte är deriverbar i alla punkter.

Ledning: Eftersom funktionen $f(x) = x + \sin x$ har oändligt många stationära punkter (i detta fall terrasspunkter $x = \pi + n2\pi\ ,\ \ n \in \mathbb{Z}$) kommer inversen att i motsvarande spegelpunkter vara lodrät och därmed sakna derivata i dessa spegelpunkter (se sats 4.6) och därmed inte vara deriverbar i dessa punkter.

3 p

7. Para ihop funktionerna a–f med korrekt beskrivning i–vi genom att studera lämpliga gränsvärden:

a) $$f(x) = \begin{cases} e^x - x & , \ x \geq 0 \\ 1 - x^2 & , \ x < 0 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

d) $$f(x) = \begin{cases} x^4 + x & , \ x \geq 0 \\ x - x^2 & , \ x < 0 \end{cases}$$

e) $$f(x) = \begin{cases} e^x & , \ x \geq 0 \\ 2x + 1 & , \ x < 0 \end{cases}$$

f) $$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

i) Högerkontinuerlig men inte vänsterkontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

ii) Kontinuerlig i $x = 0$, men inte deriverbar i $x = 0$

iii) Deriverbar med inflexionspunkt i $x = 0$

iv) Deriverbar med stationär punkt i $x = 0$

v) Varken höger- eller vänsterkontinuerlig i $x = 0$,

vi) Deriverbar med stationär punkt och inflexionspunkt i $x = 0$

Ledning: Med hjälp av (vänster- och höger-) gränsvärden för *kontinuitet* och *derivatans definition i punkt* får man svaren

a = vi, b = v, c = iv, d = iii, e = ii och f = i

3 p