Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT2022

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall			
Skrivtid:	2023-08-15 klockan 08:00-13:00			
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar främst färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.			

---

1. Lös följande obestämda integraler:

a)

$$\int \frac{4x+3}{1+x^2}\,dx$$

Lösning: $\int \frac{4x+3}{1+x^2}\,dx \;= 2\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + 3\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \;= 2\ln(1+x^2) + 3\arctan x + C$

b)

$$\int x^2 \sin 3x\,dx$$

Ledning: Upprepad partiell integration ger $-\frac{x^2\cos 3x}{3} + \frac{2x\sin 3x}{9} + \frac{2\cos 3x}{27} + C$

c)

$$\int e^{x^2} 4x\,dx$$

Lösning: $\int e^{x^2} 4x\,dx = 2\int e^{x^2} 2x\,dx = \left|\begin{array}{c}\text{Kedjeregeln}\\ \text{baklänges eller}\\ \text{variabelskifte}\end{array}\right| = \cdots = 2e^{x^2} + C$

3 p

2. Låt

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{2x^2}$$

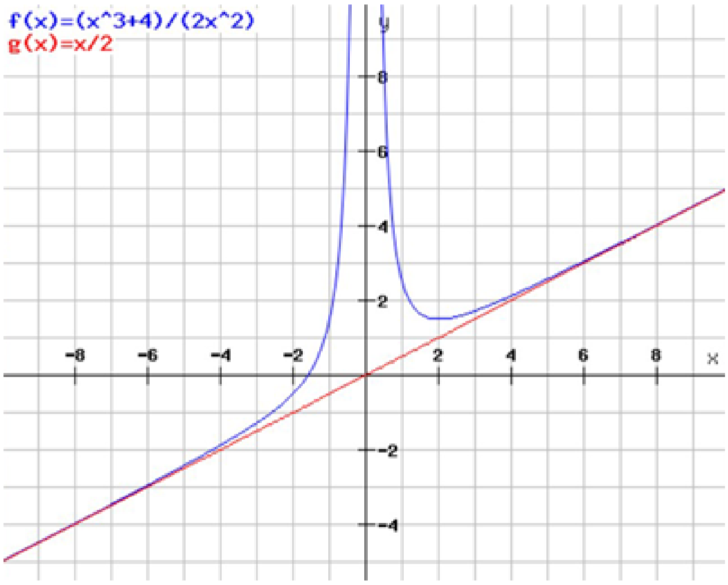
a) Bestäm samtliga asymptoter.

Ledning: Gränsvärdesstudier ger asymptoter $x = 0$ och $y = \frac{x}{2}$

b) Bestäm samtliga stationära punkter.

Ledning: Teckenstudium av derivat ger en lokal minimipunkt $x = 2$

c) Skissa grafen.

Svar: 

3 p

3.

a) Visa med hjälp av annan känd derivata att $f(x) = \arcsin x$ har derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ledning:

$$y = \arcsin x$$

Invers ger

$$\sin y = \sin(\arcsin x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x$$

Ledvis derivering med avseende på x, med y som en funktion av x och tillhörande inre derivata $\frac{dy}{dx}$, ger

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Alltså gäller att

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

b) Derivera med hjälp av kedjeregeln:

$$f(x) = e^{\sin^2 3x}$$

Ledning: Kedjeregeln ger $(x) = e^{(\sin 3x)^2} \cdot 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 6 \sin 3x \cos 3x \, e^{\sin^2 3x}$

3 p

4. Bestäm största och minsta värde för

$$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - |x + 1| \quad , \quad x \in [-27, 8]$$

Ledning:

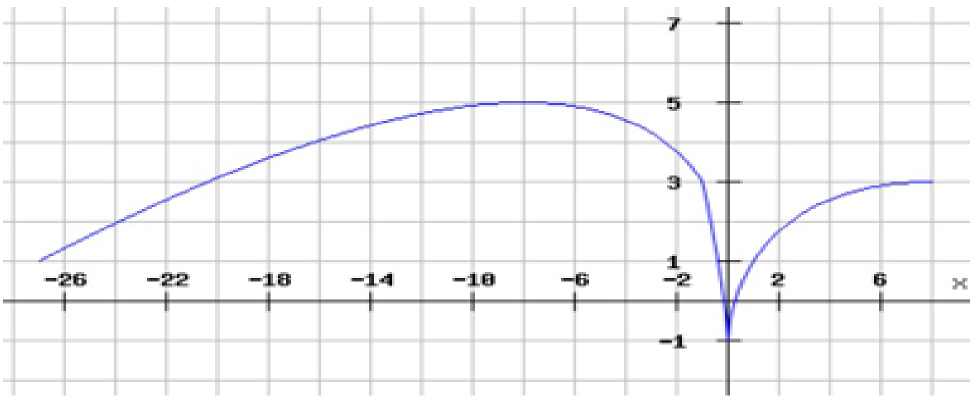
Funktionen skrivs om enligt

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{\frac{2}{3}} + x + 1 \ , & x \in [-27, -1] \\ 3x^{\frac{2}{3}} - x - 1 \ , & x \in \,]-1, 8] \end{cases}$$

Man finner följande punkter av intresse:

- Ändpunkter $x = -27$ och $x = 8$
- Singulära punkterna $x = -1$ (= skarven) och $x = 0$ (där derivata saknas)
- Stationär punkt $x = -8$

Bland dessa punkter finner man största funktionsvärde = 5 (i den stationära punkten $x = -8$) och minsta funktionsvärde = -1 (i den singulära punkten $x = 0$)



3 p

5. Låt

$$f(x) = \sin x + \cos x + 3x$$

a) Visa att $f(x)$ är strängt växande

Ledning: Man visar exempelvis att förstaderivatan är positiv för alla x-värden

b) Bestäm inversens derivata $(f^{-1})'(3\pi - 1)$

Ledning: Symmetri i $y = x$ utnyttjas hos funktion och invers. Eftersom att enbart $f(\pi) = 3\pi - 1$ (enda punkten med detta funktionsvärde) beräknas $f'(\pi) = 2$ och symmetri ger sedan enligt sats eller spegling att $(f^{-1})'(3\pi - 1) = \frac{1}{2}$

3 p

6.

a) Visa med hjälp av derivatans definition att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & \text{för} \quad x \geq 2 \\ x^3 + 12 & \text{för} \quad x < 2 \end{cases}$$

är deriverbar i $x = 2$

Ledning: Gränsvärde visar att funktionen är kontinuerlig i $x = 2$ så att $f(2) = 12$ (från den högra delfunktionen) kan användas vid beräkning av både vänster- och högerderivata. Derivatans definition i punkt ger för skarven lika derivata från båda hållen:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{(x^3 + 12) - (2^2 + 8 \cdot 2)}{x - 2} = \cdots = 12$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{(x^2 + 8x) - (2^2 + 8 \cdot 2)}{x - 2} = \cdots = 12$$

b) Härled $f'(x)$ hjälp av derivatans definition för

$$f(x) = e^{x^2}$$

Lösning:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - (x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(x+h)^2} - e^{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x^2 + 2xh + h^2} - e^{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x^2}\left(e^{2xh + h^2} - 1\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x^2}\left(e^{h(2x+h)} - 1\right)}{h}$$

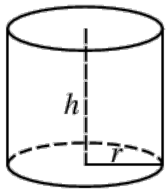
$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x^2}\left(e^{h(2x+h)} - 1\right)(2x + h)}{h(2x + h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x+h) e^{x^2} \underbrace{\frac{\left(e^{h(2x+h)} - 1\right)}{h(2x+h)}}_{\to 1} = 2xe^{x^2}$$

3 p

7. En tunna med formen av en rak cirkulär cylinder skall tillverkas av 1 m² plåt som skall räcka till två cirkulära ytor överst och underst samt en mantelyta. Bestäm cylinderns maximala volym.

3 p



Ledning:

$$\text{bottenyta} = B = \pi r^2$$

$$\text{omkretsen} = O = 2\pi r$$

$$\text{mantelytan} = M = 1 - \text{bottenytor} = 1 - 2\pi r^2$$

$$\text{höjden} = h = \frac{\text{mantelytan}}{\text{omkretsen}} = \frac{1 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$\text{volym} = V(r) = Bh = \pi r^2 \left(\frac{1 - 2\pi r^2}{2\pi r}\right) = \frac{r}{2} - \pi r^3$$

$$\begin{cases} V'(r) = \frac{1}{2} - 3\pi r^2 \\ V'(r) = 0 \end{cases} \sim \quad r = \pm \frac{1}{\sqrt{6\pi}}$$

Teckenstudium eller andraderivata ger maximal volym för

$$\begin{cases} V(r) = Bh = \pi r^2 \left(\frac{1 - 2\pi r^2}{2\pi r}\right) \\ r = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \end{cases} \sim \quad V = \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\right)^2 \cdot \frac{1 - 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\right)^2}{2\pi \frac{1}{\sqrt{6\pi}}}$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{6\pi} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{2\pi\sqrt{6\pi}}{6\pi}} = \frac{1}{3\sqrt{6\pi}} \approx 0{,}077 \text{ m}^3$$