Facit KTR3 och KTR6 TNIU19

KTR3 – 2008

1)

$z = 4e^{\frac{i\pi}{2}} = 4i$ eller $z = 4e^{\frac{i7\pi}{6}} = -2\sqrt{3} - 2i$ eller $z = 4e^{-\frac{i\pi}{6}} = 2\sqrt{3} - 2i$

2)

$z = 1 \pm 3i$ eller $z = \pm 2i$

3)

a) V_f =”alla komplexa tal innanför och på enhetscirkeln i andra och tredje kvadranten”

b) Cirkel med $r = 2$ och centrum i $z = 2 - 2\mathrm{i}$

c) Cirkel med $r = 2$ och centrum i $z = -3\mathrm{i}$

KTR3 – 2009

1)

$z = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$ eller $z = 2e^{-\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$ eller $z = 2e^{\frac{i7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$

2)

a) Cirkel med $r = 3$ och centrum i $z = -3 + 2\mathrm{i}$

b) V_f =”alla komplexa tal utanför enhetscirkeln i första och fjärde kvadranten inklusive randen”

c) T.ex. $f(z) = \frac{i}{z}$

3)

$z = 1 \pm i$ eller $z = \pm 3i$

KTR3 – 2010

1)

$z = -3i$ eller $z = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}$

2)

a) Cirkel med $r = 2$ och centrum i $z = -2 + 2\mathrm{i}$

b) Cirkel med $r = 2$ och centrum i $z = 1 + 2\mathrm{i}$

c) V_f =”alla komplexa tal innanför och på enhetscirkeln i tredje och fjärde kvadranten”

3) $z = \pm 3i$ eller $z = 1 \pm 2i$

KTR3 – 2011

1)

a) Den lodräta linjen $x = 2$ för $x = \mathrm{Re}\, z$

b) Cirkel med $r = 2$ och centrum i $z = -3i$

c) V_f =”alla komplexa tal innanför enhetscirkeln i första och fjärde kvadranten”

2)

$z = 2 \pm 2i$ eller $z = 1 \pm i$

3)

$y = -x + 4$ för $y = \mathrm{Im}\, z$ och $x = \mathrm{Re}\, z$

KTR3 – 2012

1)

$z = -3 - 2i \pm 3$

2)

a) $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$

b) $z = -1$ eller $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

c) Se kurshäftet

3)

$z = \pm 2i$ eller $z = 2 \pm 2i$

KTR3 – 2013

1)

a) $z = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \pm \frac{3i}{\sqrt{2}}$

b) $z = -3 - 2i \pm 5$

2)

a) $z = -3 - 2i$

b) $z = \pm 2i$ eller $z = \pm 3i$

3)

Den räta linjen $y = 2 - x$ för $y = \mathrm{Im}\, z$ och $x = \mathrm{Re}\, z$

KTR3 – 2014

1) $z = -2 - 3i \pm 4i$

2) $z = 2i$ eller $z = \pm\sqrt{3} - i$

3) Den räta linjen $y = 3 - x$ för $y = \operatorname{Im} z$ och $x = \operatorname{Re} z$

KTR3 – 2015

1) $z = \mp\frac{5}{\sqrt{2}} \pm \frac{5i}{\sqrt{2}}$

2) $z = -4 - i$ eller $z = -4 - 5i$

3)
   a) Värdemängden = ”innanför och på enhetscirkeln i fjärde kvadranten”
   b) Värdemängden = ”innanför och på cirkeln $|z| = 3$ i tredje och fjärde kvadranten”
   c) Randen av definitionsmängden är enhetscirkel och den avbildas på linjen $\operatorname{Re}(z) = 0$, med andra ord imaginära axeln. Värdemängden blir ”hela första och fjärde kvadranten”. Notera att ”förbjudna värdet” $z = -1$ ”avbildas på oändligheten”

,

KTR3 – 2016

1)
   a) $z_1 = 2$ eller $z_2 = 2 - 6i$
   b) $z_0 = 1 + i, z_1 = -1 + i, z_2 = -1 - i$ eller $z_3 = 1 - i$

2)
   a) $z^6 = -64$
   b) Additionssatser som verifieras med hjälp av Eulers första formel och studie av realdel respektive imaginärdel var för sig:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

3)
   a) $z_{1,2} = \pm 2i$ eller $z_{3,4} = 2 \pm 2i$

KTR6 – 2017

1)

a) $z_1 = -2 - i$ eller $z_2 = -2 - 5i$

b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$ eller $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$ eller $z_3 = \pm i$

2)

$z = \pm i$ eller $z = 2 \pm 3i$

3)

a) $x^2 + y^2 = 9$ med $x = \mathrm{Re}(z)$ och $y = \mathrm{Im}(z)$ som motsvarar en cirkel med radien 3 och centrum i origo

KTR6 – 2018

1)

a) $z = \pm 3i$ eller $z = \pm i$

b) $z = \mp \frac{6}{\sqrt{2}} \pm \frac{6}{\sqrt{2}} i$ vilket också kan skrivas som $z = \mp 3\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2} i$

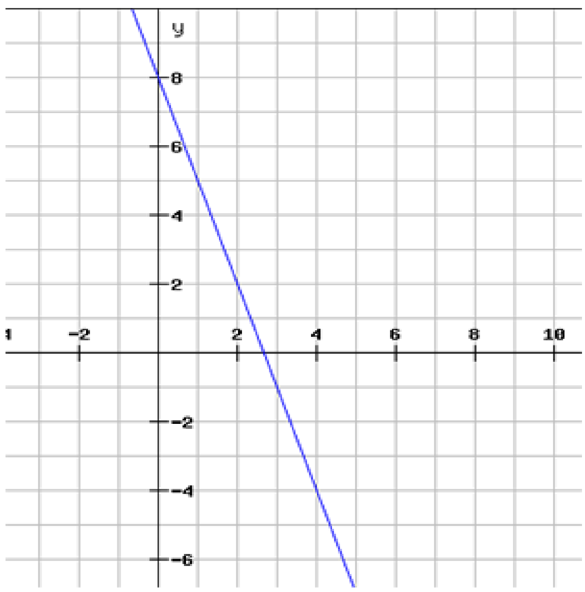
2)

a) Innanför enhetscirkeln i andra och tredje kvadranten inklusive randen

b) Första och fjärde kvadranten inklusive randen – alltså höger halva av komplexa talplanet

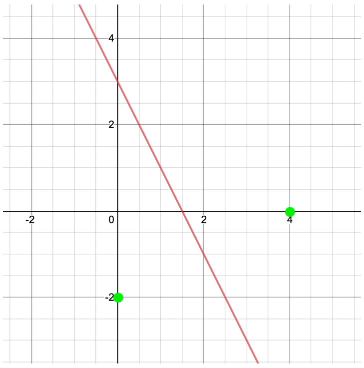
3)

a) Den räta linjen $y = 8 - 3x$ om $x = \mathrm{Re}(z)$ och $y = \mathrm{Im}(z)$



KTR6 – 2019

1) Den räta linjen $y = -2x + 3$ om $x = \mathrm{Re}(z)$ och $y = \mathrm{Im}(z)$



2)

$$e^{i(u+v)} = e^{iu}e^{iv}$$

$$\Leftrightarrow \cos(u+v) + i\sin(u+v) = (\cos u + i\sin u)(\cos v + i\sin v)$$

$$\Leftrightarrow \cos(u+v) + i\sin(u+v) = \cos u\cos v + i\sin v\cos u + i\sin u\cos v - \sin u\sin v$$

$$\Leftrightarrow \cos(u+v) + i\sin(u+v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v + i(\sin u\cos v + \cos u\sin v)$$

Realdelen ger nu:

$$\cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v$$

Imaginärdelen ger nu:

$$\sin(u+v) = \sin u\cos v + \cos u\sin v$$

3)

a) $f(z) = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(re^{i\theta})^2} = \frac{1}{r^2}e^{i(-2\theta)}$

- Som synes inverteras beloppet (i kvadrat) så att belopp större än 1 blir mindre än 1 och man får funktionsvärden innanför enhetscirkeln.
- Tidigare argument $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ byter tecken och fördubblas så att argumenten $\frac{\pi}{2} \to -\pi$ och $\pi \to -2\pi$. Alltså får man funktionsvärden i första och andra kvadranten

b) Några exempel på insatta punkter som bekräftar slutsatsen i a):

$$f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$f(i) = \frac{1}{i^2} = -1$$

$$f\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{1}{\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2} = e^{-i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$f(-1+i) = \frac{1}{(-1+i)^2} = \frac{1}{-2i} = \frac{2i}{-2i\,2i} = \frac{2i}{-4i^2} = \frac{i}{2}$$

”Oändligheten avbildas på noll”

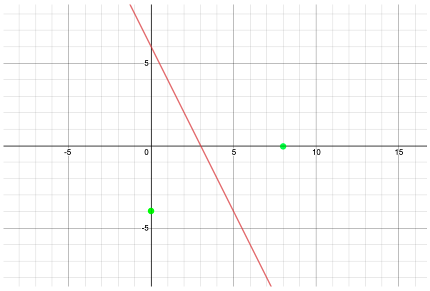
KTR6 – 2020

1)

a) Kvadratkomplettering ger svaren $z_1 = -3 - 2i$ eller $z_2 = -3 - 6i$

b) Polär form och de Moivre ger svaren $z_0 = 4i$, $z_1 = -2\sqrt{3} - 2i$ eller $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$

2) Omskrivning med $z = x + iy$ ger den räta linjen $y = -2x + 6$ om $x = \mathrm{Re}(z)$ och $y = \mathrm{Im}(z)$



3)

a) $f(z) = iz^2 = re^{i\frac{\pi}{2}}\left(re^{i\theta}\right)^2 = r^2 e^{i\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$

- Som synes kvadreras beloppet så att belopp större än och lika med 1 blir större än och lika med 1 och man får funktionsvärden utanför enhetscirkeln.
- Tidigare argument $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ fördubblas och adderas med $\frac{\pi}{2}$ så att argumenten $\frac{\pi}{2} \to \frac{3\pi}{2}$ och $\pi \to \frac{5\pi}{2}$. Alltså får man funktionsvärden i fjärde och första kvadranten

b) Några exempel på insatta punkter som bekräftar slutsatsen i a):

$$f(-1) = i(-1)^2 = i$$

$$f(i) = i^3 = -i$$

$$f\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = e^{i2\pi} = 1$$

$$f(-1+i) = i(-1+i)^2 = i(-2i) = 2$$

”Oändligheten avbildas på oändligheten”

KTR6 – 2021

1)

Båda metoderna (med de Moivre eller med ekvationssystem ur $z = x + iy$) ger svaren

$$z = \pm\sqrt{8} \mp \sqrt{8}i$$

som också kan skrivas som

$$z = \pm 2\sqrt{2} \mp 2\sqrt{2}i$$

eller

$$z = \pm\frac{4}{\sqrt{2}} \mp \frac{4}{\sqrt{2}}i$$

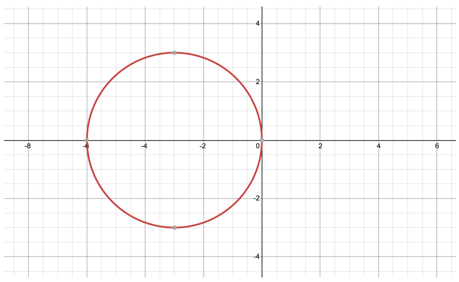
2) Ekvationen

$$x^2 + 6x + y^2 = 0$$

ger efter omskrivning med hjälp av kvadratkomplettering cirkeln

$$(x+3)^2 + y^2 = 3^2$$

med centrum i punkten $(-3, 0)$ och radien $r = 3$, för $x = \mathrm{Re}\, z$ och $y = \mathrm{Im}\, z$.



3)

a) Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^3} = \frac{1}{(re^{i\theta})^3} = \frac{1}{r^3}e^{i(-3\theta)}$$

- …visar att argumenten inom $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ i definitionsmängden tillhör $\left[-\frac{9\pi}{2}, -3\pi\right]$ i värdemängden som (två varv framåt) motsvarar $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
- …visar att absolutbeloppen inom $[0, 1]$ i definitionsmängden tillhör $[1, \infty]$ i värdemängden, slutna intervall är OK eftersom vi hanterar det utvidgade komplexa talplanet $\mathbb{C}_\infty$.

Sammanfattningsvis får man en värdemängd ”utanför enhetscirkeln i 4:e, 1:a och 2:a kvadranten.

b) Exempel på punkter som bekräftar ovanstående:

$$f(-1) = \frac{1}{(-1)^3} = -1$$

$$f(-i) = \frac{1}{(-i)^3} = -i$$

”Origo avbildas på oändligheten”

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = f\left(e^{i\frac{5\pi}{4}}\right) = \frac{1}{\left(e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^3} = e^{-i\frac{15\pi}{4}} = \left|\begin{matrix}\text{tre varv}\\ \text{framåt}\end{matrix}\right| = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

KTR6 – 2022

1)

a) De Moivre ger tre rötter:
$z_0 = 4i,\ z_1 = -2\sqrt{3} - 2i$ eller $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$

b) Kvadratkomplettering ger
$z_1 = -3 + 3i$ eller $z_1 = -3 - 7i$

c) $z = x + iy$ med tillhörande konjugat ger $z = 3 + 4i$

2) För $x = \mathrm{Re}\, z$ och $y = \mathrm{Im}\, z$ får man lösningen $x^2 + y^2 = 3^2$ – alltså alla punkter på en cirkel med radien 3 och centrum i origo i det komplexa talplanet.

3) Rotgissning ger $z = i$ med tillhörande konjugat $z = -i$ tack vare att polynomekvationen har reella koefficienter. Polynomdivision med den tillhörande gemensamma ”primfaktorn” $z^2 + 1$ ger den andra ”primfaktorn” $z^2 + 4z + 8$ med de två tillhörande nollställena $z = -2 \pm 2i$ som man finner efter kvadratkomplettering.

Sammanfattningsvis rötterna $z = \pm i$ eller $z = -2 \pm 2i$

KTR6 – 2023

1)

a) De Moivre ger de sex enhetsrötterna:
$z_{1,2} = \pm 1\ ,\ \ z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ eller $z_{5,6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

b) Kvadratkomplettering ger
$z_1 = 1 + 5i$ eller $z_2 = 1 + i$

c) $z_{1,2} = \pm i$ eller $z_3 = 7$

2) Insättning av $z = re^{iv}$ ger en värdemängd innanför en cirkel med $|z| = 2$, i den första och fjärde kvadranten, inklusive randen.

3) Alla punkter längs den räta linjen $y = 2x + \frac{11}{2}$ med $x = \mathrm{Re}\, z$ och $y = \mathrm{Im}\, z$.