

Kontrollskrivning 2025

Envariabelanalys del 2

Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	KTR1
Institution:	ITN
Max:	12 p
Bonus 2 p:	Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p:	Vid resultat 5–7 p
Lösningar:	Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare, gradskiva
Skrivtid:	2025-02-11 kl 08:00-10:00
Jour:	Peter Holgersson 0705-19 99 92

1. Beräkna följande integraler:

a.

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$$

Lösningstips: Man noterar att $x = 0$ inte ingår i funktionens definitionsmängd så integralen måste delas upp i två integraler för att kunna integreras över sammanhängande intervall. Generaliseringen i origo hävs med hjälp av gränsvärden och man erhåller integraler över kompakta intervall så att Insättningsformeln kan användas. Båda integralerna är divergenta med det oegentliga gränsvärdet ∞ .

b.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$$

Lösningstips: Substitutionen $u = \sin x$ ger integralen

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + u^2} du = [\arctan u]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2. Vilket värde på $f(\xi)$ får man om man tillämpar Medelvärdessatsen för integraler på integralen

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

Svar: Integralens värde är 2 och motsvarar produkten $f(\xi)(\pi - 0)$ vilket ger $f(\xi) = \frac{2}{\pi}$.
2 p

3. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+6} \frac{3t^2 + 5}{t^2} \, dt$$

Lösningstips: Medelvärdessatsen för integraler ger svaret 18.
2 p

4. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området mellan x -axeln och kurvan $y = \sqrt{9 - x^2}$ roterar ett varv runt x -axeln.

Lösningstips:
En skiva har volymen:
 $dV = \pi y^2 dx = \pi(9 - x^2) dx$

$$V = \int_{-3}^3 dV = \pi \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \dots = 36\pi \text{ volymenheter}$$

2 p

5. Beräkna integralen med hjälp av en Riemann-summa:

$$\int_0^5 3x \, dx$$

Lösningstips: En översumma med n stycken "remsor" med bredden $\frac{5}{n}$ ges av

$$3 \left(1 \cdot \frac{5}{n} \right) \frac{5}{n} + 3 \left(2 \cdot \frac{5}{n} \right) \frac{5}{n} + 3 \left(3 \cdot \frac{5}{n} \right) \frac{5}{n} + \dots + 3 \left(n \cdot \frac{5}{n} \right) \frac{5}{n}$$

$$= \frac{75}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{75}{n^2} \cdot \frac{n+1}{2} n$$

$$= \frac{75(n^2 + n)}{2n^2} = \frac{75}{2} + \frac{75}{2n} \rightarrow \frac{75}{2} \text{ då } n \rightarrow \infty$$

2 p