INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Kontrollskrivning – 2021

Envariabelanalys del 1 för byggnadsingenjörer

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	KTR1
Max:	12 p
Bonus 2 p:	Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p:	Vid resultat 5–7 p
Bonus 0 p:	Vid resultat 0–4 p
Lösningar:	Fullständiga med förklarande tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, gradskiva, kurvmall och passare
Skrivtid:	2021-11-24, 14:00–16:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1) Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(e^{\sin 6x} - 1\right) \tan 4x}{\ln(1 + 3x^2)}$$

Ledning: Förlängning med bland andra $\sin 6x$ ger med standarsgränsvärden svaret 8.

2 p

b)

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^4 - x^4}{h}$$

Ledning: Utveckling och förkortning med h ger $4x^3$.

2 p

2) Visa med hjälp av ”*följdsatsen till satsen om mellanliggande värde*” att funktionerna har minst en skärningspunkt:

$$f(x) = \arccos x$$
$$g(x) = e^x$$

Ledning: Man studerar funktionerna inom ett kompakt intervall, till exempel intervallet $x \in [-1, 1]$ inom vilket *båda* funktionerna är definierade. Man visar att i ena kanten gäller att $f(-1) > g(-1)$ och i andra kanten gäller att $f(1) < g(1)$. Man påtalar även att de båda funktionerna är *kontinuerliga* enligt sats; de är elementära funktioner. Därmed är alla villkoren uppfyllda och satsen kan tillämpas med slutsatsen att det finns minst en skärningspunkt inom det öppna intervallet – i detta fall $x \in [-1, 1]$.

2 p

3) Lös olikheten

$$\ln 3x \geq \ln(9x - x^2)$$

Ledning: Vänsterledet kräver att $x \in]0, \infty[$ och högerledet kräver att $x \in]0, 9[$ vilket inses genom faktorisering och teckenstudie. Sammanfattningsvis är olikheten definierad för $x \in]0, 9[$ vilket är snittet av mängderna. Olikheten löses (bland annat genom faktorisering och teckenstudie) och man får till en början förslaget $x \in]-\infty, 0] \cup [6, \infty[$ som i snitt med definitionsmängden $x \in]0, 9[$ ger lösningsmängden $x \in [6, 9[$

3 p

4) Para ihop funktion med korrekt påstående, utifrån egna skisser av tillhörande grafer:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , \; 2 \leq x \leq 4 \\ x - 3 & , \; 4 < x \leq 6 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , \; 2 \leq x \leq 4 \\ x - 3 & , \; 7 < x \leq 9 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , \; 2 \leq x \leq 4 \\ x - 3 & , \; 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , \; 2 \leq x \leq 4 \\ x - 3 & , \; 8 \leq x \leq 10 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , \; 2 \leq x \leq 4 \\ x - 3 & , \; 0 \leq x < 2 \end{cases}$

i) Funktionen är diskontinuerlig, är strängt monoton och har kontinuerlig invers.

ii) Funktionen är diskontinuerlig, är inte strängt monoton och saknar invers.

iii) Funktionen är kontinuerlig, är strängt monoton och har kontinuerlig invers.

iv) Funktionen är kontinuerlig, är inte strängt monoton och saknar invers.

v) Funktionen är kontinuerlig, är strängt monoton och har diskontinuerlig invers.

Svar: a = ii, b = v, c = iv, d = iii och e = i

3 p